

سرفصلها و نمودار درختی درس:

منطق گزاره ها

نمادین کردن گزاره های بسیط و مرکب

نقض

عطف

فصل

شرط

دو شرطی

نمادین سازی گزاره های مرکب طولانی

برخی اشتباهات متداول در نمادین سازی

چکیده مطالب:

استدلال عبارتست از مجموعه ای از مقدمات که منجر به نتیجه ای شود. بدیهی است که بین مقدمات باید ارتباطی وجود داشته باشد. در منطق گزاره ها پل ارتباطی بین مقدمات، گزاره است و به تعبیری دیگر کوچکترین واحد استدلال، گزاره می باشد. اما در منطق معمولها پل ارتباطی توسط کلمه ایجاد می شود. در چند جلسه آینده به معرفی منطق گزاره ها می پردازیم.

گزاره ها را می توان به دو دسته تقسیم کرد: گزاره های بسیط که قابل تجزیه به گزاره های کوچکتر نیستند و گزاره های مرکب که به گزاره های بسیط قابل تحلیل و تجزیه هستند. ادات ربط، ابزارهایی منطقی هستند که گزاره های بسیط را به هم متصل کرده و گزاره های مرکب را به وجود می آورند. ادات ربط در منطق عبارتند از: نقض، عطف، فصل، شرط و دوشروطی. گزاره های مرکبی که توسط این ادات ساخته می شوند به ترتیب گزاره مرکب نقضی، گزاره مرکب عطفی، گزاره مرکب فصلی، گزاره مرکب شرطی و گزاره مرکب دوشروطی نام دارند.

هر چه گزاره ها طولانی تر و پیچیده تر شوند شناسایی ساختار آنها و همچنین نشان دادن اجزای آنها مشکل تر می شود. در راستای حل این مشکل بود که منطق دانان با الهام گرفتن از ریاضیات سعی کردند گزاره های زبان را نمادین کنند. منطق نمادین نخست اینکه سرعت محاسبات منطقی را افزایش می دهد؛ دوم ما را از مغالطات زبان شناختی که عمدتاً ریشه در ابهام و ابهام زبان طبیعی دارند به دور نگه می دارند؛ سوم امکان ورود در حوزه هایی را فراهم می آورند که با منطق غیر نمادین اساساً ممکن نیست.

هر گزاره بسیطی را می توان با یک حرف مثلاً "الف" یا "θ" یا "P" نشان داد. همچنین برای ادات منطقی نیز نمادهایی معین شده است بدین صورت که: نقض "¬"؛ عطف "∧"؛ فصل "∨"؛ شرطی "É"؛ و دوشروطی "↔". با استفاده از این نمادها می توان تمام گزاره های زبان، چه بسیط و چه مرکب را نمادین کرد.

اهداف:

- آشنایی با تفاوت منطق گزاره ها و منطق معمولها
- آشنایی با گزاره های بسیط و مرکب
- یادگیری تجزیه و تحلیل گزاره های مرکب
- یادگیری انواع ادات منطقی
- آشنایی با اهداف نمادین سازی گزاره ها
- یادگیری نمادهای ادات منطقی
- یادگیری نحوه نمادین کردن گزاره های بسیط و مرکب

نمادین سازی

مقدمه

همانگونه که در بخش قبل دیدیم هر چه گزاره ها طولانی تر و پیچیده تر شوند شناسایی ساختار آنها و همچنین نشان دادن اجزای آنها مشکل تر می شود. در راستای حل این مشکل بود که منطق دانان با الهام گرفتن از ریاضیات سعی کردند گزاره های زبان را نمادین و یا به اصطلاح منطق دانان صورتی¹ کنند. "گوتلب فرگه"، "برتراند راسل" و "آلفرد نورث وایتهد" از اولین منطق دانانی بودند که در اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم تلاش کردند تا از نمادهای مناسب و تکنیکهای شبه ریاضی به منطق شکل جدیدی دهند.

منطق نمادین نخست اینکه سرعت محاسبات منطقی را افزایش می دهد؛ دوم ما را از مغالطات زبان شناختی که عمدتاً ریشه در ابهام و ابهام زبان طبیعی دارند به دور نگه می دارند؛ سوم امکان ورود در حوزه هایی را فراهم می آورند که با روشی که در بخش قبل دیدیم اساساً ممکن نیست. در ادامه این بخش به شیوه نمادین کردن گزاره های بسیط و مرکب آشنا می شویم.

نمادین کردن گزاره های بسیط و مرکب

هر گزاره بسیطی را می توان با یک حرف مثلاً "الف" یا " θ " یا "P" نشان داد، از آنجایی که منطق جدید با الهام گرفتن از ریاضیات شکل گرفته است منطق دانان معمولاً هر گزاره بسیطی را با یک حرف انگلیسی نشان می دهند. مانند: A, B, P, Q, \dots هم چنین می توان با استفاده از اعداد یا دیگر نمادهای ریاضی تعداد نمادها را افزایش داد. مانند:

P_1, Q_1, R_1, \dots

P', Q', \dots

P'', Q'', \dots

به نمادهایی که برای نمادین کردن گزاره ها استفاده می شود اصطلاحاً "نمادهای گزاره ای" یا "گزاره نما" گفته می شود. بدین ترتیب می توان گزاره های بسیط را معادل یک نماد گزاره ای قرار داد. مانند:

برف سپید است $P =$

علی به مدرسه رفت $Q =$

یکی از اهداف نمادین ساختن، آشکار کردن ساختار گزاره های مرکب با سهولت بیشتر است. دیدیم که گزاره های مرکب بوسیله ی ادات ربط منطقی ساخته می شوند. بنابراین لازم است نمادهایی را نیز برای ادات ربط معرفی کنیم.

نقض:

در منطق از نماد " \sim " برای نشان دادن نقض استفاده می شود. بنابراین اگر بخواهیم گزاره مرکب "چنین نیست که علی در مدرسه است" را نمادین کنیم ابتدا باید اجزای آن را شناسایی کرده و سپس برای گزاره موجود در آن یک نماد در نظر بگیریم مانند:

علی در مدرسه است $P =$

حال می توان با سهولت از " $\sim P$ " برای نشان دادن گزاره مرکب "چنین نیست که علی در مدرسه است" استفاده کنیم. به چند مثال توجه کنید:

چنین نیست که هوا گرم است.

هوا گرم است $Q =$

\Leftarrow چنین نیست که هوا گرم است $\sim Q =$

$R =$ زمین می چرخد.

$\sim R =$ چنین نیست که زمین می چرخد.

¹ Formal

نکته مهم: همیشه از نمادهای گزاره ای برای نشان دادن گزاره های مثبت یا به اصطلاح منطقی، "موجب" استفاده می شود. گزاره های منفی یا "سالبه" همواره یک گزاره مرکب محسوب می شوند. بنابراین:
 هوا گرم نیست = چنین نیست که هوا گرم است.
 هوا گرم است = P
 هوا گرم نیست = $\sim P$

عطف

از نماد " \wedge " برای نشان دادن عطف استفاده می شود. بنابراین شکل کلی یک گزاره مرکب عطفی به صورت " $P \wedge Q$ " می باشد. مانند:

حسن به کتابخانه رفت = P
 حسن کتاب منطق را به امانت گرفت = Q
 حسن به کتابخانه رفت و کتاب منطق را به امانت گرفت = $P \wedge Q$

علی و حسین دانشجو هستند = $Q \wedge R$
 علی دانشجو است = Q
 حسین دانشجو است = R

نکته مهم: همانطور که ساختار نمادین گزاره های مرکب عطفی نشان می دهد، دو گزاره مانند P و Q توسط ادات عطف، " \wedge "، به هم متصل می شوند، اما از نظر منطقی جا به جایی این دو گزاره تفاوتی در معنای گزاره مرکب عطفی به وجود نمی آورد؛ یعنی " $P \wedge Q$ " و " $Q \wedge P$ " همواره معادل هم هستند و تفاوتی ندارد کدام را به کار ببریم. این نکته نشان می دهد که نماد " \wedge " تفاوتی با عطف یا "و" در زبان طبیعی دارد. به مثال فوق دوباره توجه کنید:

حسن به کتابخانه رفت و کتاب منطق را به امانت گرفت = $P \wedge Q$
 همانطور که گفته شد می توان این گزاره را به صورت " $Q \wedge P$ " هم نمادین کرد. اما وقتی به زبان طبیعی مراجعه می کنیم نمی توان دو گزاره زیر را یکسان دانست.

حسن به کتابخانه رفت و کتاب منطق را به امانت گرفت.
 حسن کتاب منطق را به امانت گرفت و به کتابخانه رفت.

باید توجه کرد که علیرغم تفاوت در معنای دو جمله فوق، از نظر منطقی ساختار آنها یکسان و معادل با " $P \wedge Q$ " یا " $Q \wedge P$ " است و از نظر منطقی این دو گزاره تفاوتی با هم ندارند. تعاقب و توالی حوادث مورد نظر منطق دانان در هنگام نمادین سازی گزاره های عطفی نمی باشد.

فصل

از نماد " \vee " برای نشان دادن فصل و "یا" در نمادین سازی گزاره ها استفاده می شود. مجددا در این مورد نیز جا به جایی گزاره هایی که در مرکب فصلی به کار رفته اند تفاوتی در محتوای $P \vee Q$ به وجود نمی آورد.
 مثال:

این مثلث یا متساوی الساقین است یا قائم الزاویه = $Q \vee P = P \vee Q$
 این مثلث متساوی الساقین است = P
 این مثلث قائم الزاویه است = Q

شرط

نماد " \dot{E} " معادل با "اگر ... آنگاه ..." است. پس گزاره های شرطی چنین نمادین می شوند:

اگر باران ببارد زمین تر می شود = $P \dot{E} Q$

باران ببارد = P

زمین تر می شود = Q

P در مثال فوق مقدم گزاره شرطی و Q تالی آن است.

نکته مهم: در شرط نمی توان جای مقدم و تالی را عوض کرد پس $P \dot{E} Q$ با $Q \dot{E} P$ معادل نیست و معنای این دو گزاره کاملا متفاوت می باشد. به مثال دیگری توجه کنید:

هوا سرد می شود مشروط به آنکه زمستان باشد.

اگر زمستان باشد آنگاه هوا سرد می شود = $R \dot{E} T$

زمستان باشد = R

هوا سرد می شود = T

حال اگر گزاره $T \dot{E} R$ را تشکیل دهیم گزاره زیر به دست می آید که معنایی کاملا متفاوت با $R \dot{E} T$ دارد:

اگر هوا سرد باشد آنگاه زمستان می شود = $T \dot{E} R$

دو شرطی

نماد " \circ " برای نمادین کردن گزاره های مرکب دو شرطی به کار می رود. بنابراین:

رضا سیر است اگر و تنها اگر غذا خورده باشد = $P \circ Q$

رضا سیر است = P

رضا غذا خورده باشد = Q

دو نکته مهم در مورد دو شرطی ها وجود دارد.

نکته اول: در مورد دو شرطی ها نیز جا به جایی دو گزاره تفاوتی در معنای گزاره مرکب به وجود نمی آورد. بنابراین " $P \circ Q$ " با " $Q \circ P$ " یکسان و معادل است.

رضا سیر است اگر و تنها اگر غذا خورده باشد = اگر و تنها اگر رضا غذا خورده باشد، سیر است

$$Q \circ P = P \circ Q$$

نکته دوّم: گفته شد که گزاره های مرکب دو شرطی، از جمله ی شرطی تشکیل شده اند که توسط ادات ربط به هم پیوند داده شده اند. یعنی:

رضا سیر است اگر و تنها اگر غذا خورده باشد = اگر رضا غذا خورده باشد آنگاه سیر است و اگر رضا سیر است آنگاه غذا خورده است.

اکنون که نحوه نمادین کردن گزاره های شرطی را آموخته ایم می توانیم هر کدام از شرط های فوق را نمادین کنیم بدین صورت که:

اگر رضا غذا خورده باشد آنگاه سیر است = $Q \dot{E} P$

اگر رضا سیر است آنگاه غذا خورده است = $P \dot{E} Q$

هم چنین می توانیم با توجه به شیوه نمادین کردن گزاره های عطفی دو گزاره شرطی را به هم متصل کنیم:

$$(Q \dot{E} P) \dot{U} (P \dot{E} Q) = P \circ Q$$

همانطور که قبلا دیده بودیم هر گزاره دو شرطی حاصل عطف دو گزاره شرطی است. این امر را می توان در شکل نمادین فوق هم ببینیم. هم

چنین با توجه به امکان جا به جایی دو گزاره در جملات عطفی می توانیم بنویسیم:

$$P \circ Q = (Q \dot{E} P) \dot{U} (P \dot{E} Q) = (P \dot{E} Q) \dot{U} (Q \dot{E} P)$$

نمادین سازی گزاره های مرکب طولانی

همانگونه که در مورد نمادین کردن گزاره های دو شرطی دیدیم، می توان گزاره های پیچیده را هم نمادین کرد. استفاده مناسب از پرانتز یا گروه به ما کمک می کند از به هم ریختگی و بی نظمی در گزاره های نمادین شده جلوگیری کنیم. اکنون در ادامه گزاره های مرکب پیچیده ای را که قبلا بیان شدند را به عنوان مثال نمادین می کنیم:

چنین نیست که اگر باران ببارد آنگاه خشکسالی بر طرف می شود. $\sim(P \acute{E} Q)$

باران ببارد $P =$

خشکسالی برطرف شود $Q =$

ابن سینا یا منطق دان یا پزشک است و در تاریخ نام نیکی از خود به جا گذاشته است. $(P \acute{U} Q) \grave{U}R =$

ابن سینا منطق دان است $P =$

ابن سینا پزشک است $Q =$

ابن سینا در تاریخ نام نیکی از خود به جا گذاشته است $R =$

علی و حسین در مدرسه هستند یا امروز تعطیل است $(P \grave{U} Q) \acute{U}R =$

علی در مدرسه است $P =$

حسین در مدرسه است $Q =$

امروز تعطیل است $R =$

اگر علی خوب درس بخواند آنگاه یا شاگرد اول می شود یا شاگرد دوم. $P \acute{E} (Q \acute{U}R) =$

علی خوب درس بخواند $P =$

علی شاگرد اول می شود $Q =$

علی شاگرد دوم می شود $R =$

اگر اقتصاد کشور خراب شود آنگاه اگر تلاشی از سوی دولت نشود آنگاه فقر دامن گیر همه مردم می شود. $P \acute{E} (\sim Q \acute{E} R) =$

اقتصاد کشور خراب شود $P =$

تلاشی از سوی دولت شود $Q =$ (فراموش نکنیم که همواره گزاره های مثبت (موجبه) را به عنوان گزاره بسیط در نظر می گیریم)

فقر دامن گیر همه می شود $R =$

برخی اشتباهات متداول در نمادین سازی

اگر چه نمادین سازی گزاره های مرکب موجب می شود بتوان با سهولت بسیار بیشتری ساختار گزاره های مرکب را کشف کرد و آن ساختار را نشان داد، اما عدم توجه به ظرایف این کار ممکن است خطاهایی را به وجود آورد که معنا و محتوای گزاره ها را عوض می کند. در ادامه به برخی از اشتباهات که در حین نمادین سازی دیده می شوند اشاره می کنیم:

الف) عدم استفاده مناسب از پرانتز:

به گزاره زیر توجه کنید: $P \acute{U} Q \acute{U} R$

به نظر شما این گزاره به شکل $P \acute{U} (Q \acute{U} R)$ است یا $(P \acute{U} Q) \acute{U} R$ ؟ این دو گزاره می توانند معانی متفاوتی داشته باشند. مانند:

$P =$ علی به مدرسه می رود

$Q =$ علی به سالن ورزش می رود

$R =$ علی به کتابخانه می رود

$P \dot{\cup} (Q \dot{\cup} R)$ = علی به مدرسه می رود و به سالن ورزش یا کتابخانه می رود.

$(P \dot{\cup} Q) \dot{\cup} R$ = علی به مدرسه یا سالن ورزش می رود و به کتابخانه می رود.

دو گزاره فوق هم معنا نیستند و عدم توجه به استفاده مناسب از پرانتز باعث گردیده نمادین سازی به اشتباه صورت گیرد. مثال فوق نشان می دهد بهتر است همیشه از پرانتز هنگامی که یک گزاره مرکب را نمادین سازی می کنیم استفاده کنیم.

ب) عدم توجه به مکان مناسب ادات نقض " \sim "

به دو گزاره زیر توجه کنید:

$(\sim P \dot{\cup} Q)$

$\sim(P \dot{\cup} Q)$

دو گزاره فوق کاملا معنای متفاوتی دارند. مثلا اگر P = "هوا سرد است" و Q = "زمستان است" باشد آنگاه داریم:

$(\sim P \dot{\cup} Q)$ = اگر هوا سرد نیست آنگاه زمستان است.

$\sim(P \dot{\cup} Q)$ = چنین نیست که اگر هوا سرد است آنگاه زمستان است.

ج) عدم توجه به کلمات مترادفی که به جای ادات ربط به کار می روند

همانطور که در بخشهای قبل گفتیم گاهی به جای ادات پنج گانه ربط، کلمات دیگری به کار می روند که همان کارکرد و معنا را دارند. اما ممکن است مبهم بودن معنای برخی از این کلمات ما را به اشتباه بیندازد. به گزاره زیر توجه کنید:

به خدا اگر او تمرین خودش را نوشته باشد.

وجود کلمه "اگر" ممکن است ما را به این اشتباه بیندازد که گزاره فوق یک گزاره شرطی است. اما گزاره فوق تنها به این معنی است که "او تمرین خودش را ننوشته است". پس اگر بخواهیم جمله فوق را نمادین کنیم باید به صورت زیر عمل کنیم:

P = او تمرین خودش را نوشته است.

به خدا اگر او تمرین خودش را نوشته باشد = او تمرین خودش را ننوشته است = $\sim P$

یا به گزاره زیر دقت کنید:

علی به مدرسه می رود اما در کلاس شرکت نمی کند.

"اما" در جمله فوق به معنای "و" یا عطف است. پس گزاره فوق به صورت زیر نمادین می شود:

P = علی به مدرسه می رود.

Q = علی در کلاس شرکت می کند.

علی به مدرسه می رود اما در کلاس شرکت نمی کند = $(P \dot{\cup} \sim Q)$

نکته: گاهی دیده می شود که در نمادین کردن گزاره ها، اشاره نمی شود که حروف انگلیسی معادل کدام گزاره انتخاب شده اند. مثلا در نمادین سازی گزاره "اگر برف بیارد آنگاه هوا سرد می شود" تنها به ذکر $P \dot{\cup} Q$ اکتفا می شود. اما بهتر است همواره بیان کنیم که P و Q به جای کدام گزاره قرار گرفته اند یعنی:

P = برف بیارد.

Q = هوا سرد می شود.

$P \dot{\cup} Q$ = اگر برف بیارد آنگاه هوا سرد می شود.

انجام این کار از برخی اشتباهات مرسوم جلوگیری می کند.

تمرین

گزاره های زیر را نمادین کنید.

سوال (1) امروز باران می بارد.

(1) $P =$ امروز باران می بارد. (گزاره بسیط است)

سوال (2) نه باران می بارد و نه برف

(2) $P =$ باران می بارد

برف می بارد $Q =$

نه باران می بارد و نه برف $(\sim P \dot{\cup} \sim Q) =$

سوال (3) چنین نیست که اگر عینک بزنی با سواد می شوی.

(3) $R =$ عینک بزنی

با سواد می شوی $S =$

چنین نیست که اگر عینک بزنی با سواد می شوی $\sim(R \dot{\cup} S) =$

سوال (4) نابرده رنج گنج میسر نمی شود.

(4) $P =$ نابرده رنج گنج میسر می شود

نابرده رنج گنج میسر نمی شود $\sim P =$

سوال (5) غذای امروز مقوی است اگر و فقط اگر متناسب با رژیم غذایی باشد.

(5) $P =$ غذای امروز مقوی است

غذای امروز متناسب با رژیم غذایی باشد $R =$

غذای امروز مقوی است اگر و فقط اگر متناسب با رژیم غذایی باشد $P \dot{\cup} R =$

سوال (6) اگر حسن برنامه ی سینمایی را مشاهده کرده باشد و واقعه ای استثنائی رخ نداده باشد آنگاه حسن در درس شیمی مردود شده است.

(6) $S =$ حسن برنامه ی سینمایی را مشاهده کرده باشد

واقعه ای استثنائی رخ داده باشد $T =$

حسن در درس شیمی مردود شده است $U =$

اگر حسن برنامه ی سینمایی را مشاهده کرده باشد و واقعه ای استثنائی رخ نداده باشد آنگاه حسن در درس شیمی مردود شده است $(S \dot{\cup} U) =$

$\sim T) \dot{\cup} U$

سوال (7) اگر حسین درآمد بالایی به دست نیابد آنگاه یا با معدل عالی در رشته مدیریت فارغ التحصیل نشده است، یا شغل مناسبی را دست و

پا نکرده است، یا به دنبال اهداف دیگری بوده است.

$P =$ حسین درآمد بالایی به دست آورد.

$Q =$ حسین با معدل عالی در رشته مدیریت فارغ التحصیل شده است.

$R =$ حسین شغل مناسبی را دست و پا کرده است.

$S =$ حسین به دنبال اهداف دیگری بوده است.

اگر حسین درآمد بالایی به دست نیابد آنگاه یا با معدل عالی در رشته مدیریت فارغ التحصیل نشده است، یا شغل مناسبی را دست و پا نکرده

است، یا به دنبال اهداف دیگری بوده است $\sim P \dot{\cup} [(\sim Q \dot{\cup} \sim R) \dot{\cup} S] =$

تمرین

معادل فارسی (یا غیر نمادین) گزاره های زیر را بنویسید: (معنای نمادهای P، Q، R در کل تمرین ثابت هستند)

P = رضا فیلم سینمایی را دیده است.

Q = حسن فیلم سینمایی را دیده است.

R = حسن به مدرسه رفته است.

S = رضا به مدرسه رفته است.

سوال (1) $(P \dot{\cup} \sim Q)$

(1) رضا فیلم سینمایی را دیده است اما حسن فیلم سینمایی را ندیده است.

سوال (2) $\sim P \dot{\cup} (Q \dot{\cup} R)$

(2) اگر رضا فیلم سینمایی را ندیده است آنگاه یا حسن فیلم سینمایی را دیده است یا حسن به مدرسه رفته است.

سوال (3) $(R \dot{\cup} \sim Q)$

(3) اگر حسن به مدرسه رفته است آنگاه فیلم سینمایی را ندیده است.

(4) $(R \dot{\cup} S) \dot{\cup} (\sim P \dot{\cup} \sim Q)$

(4) اگر حسن و رضا به مدرسه رفته اند آنگاه نه حسن فیلم سینمایی را دیده است و نه رضا.