

۳-۵ جدول ارزش گزاره‌های مرکب شرطی

گزاره‌های مرکب شرطی مانند «اگر باران بیارد، هوا لطیف می‌شود» که به صورت $p \rightarrow q$ نشان داده می‌شود، در صورتی صادق است که اگر مقدم آن صادق باشد، تالی آن کاذب نباشد، به عبارت دیگر، گزاره‌های مرکب شرطی در سه صورت صادق هستند: الف) مقدم و تالی صادق باشند.

ب) مقدم و تالی کاذب باشند.

ج) مقدم کاذب و تالی صادق باشد.

گزاره‌های مرکب شرطی فقط در یک حالت کاذب هستند و آن اینکه مقدم آنها صادق و تالی آنها کاذب باشد.

برای نگارش جدول ارزش یک گزاره مرکب شرطی مانند $p \rightarrow q$ ابتدا ارزش مؤلفه‌های آن را می‌نویسیم. مانند جدول زیر:

جدول (الف)

p	\rightarrow	Q
T		T
T		F
F		T
F		F

سپس ارزش گزاره مرکب شرطی ($p \rightarrow q$) را زیر نماد شرط (\rightarrow) می‌نویسیم، مانند جدول ب:

جدول (ب)

p	\rightarrow	Q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F

همچنان‌که مشاهده می‌کنید فقط در سطر دوم که مقدم (p) ارزش صدق (T) دارد و تالی (q) ارزش کذب (F) دارد، گزاره مرکب $p \rightarrow q$ کاذب است و در سایر حالات صادق می‌باشد.

مثال ۱: $(p \rightarrow q) \rightarrow P$

جدول (الف)

(P	\rightarrow	q)	\rightarrow	P
T		T		T
T		F		T
F		T		F
F		F		F

جدول (ب)

(P	\rightarrow	q)	\rightarrow	P
T	T	T		T
T	F	F		T
F	T	T		F
F	T	F		F

جدول (ج)

(P	\rightarrow	q)	\rightarrow	P
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	T	F	F	F

همچنان که مشاهده می‌کنید در جدول (الف) ابتدا ارزش مؤلفه‌ها نوشته شده‌است و در جدول (ب) ارزش کل گزاره $(p \rightarrow q)$ زیر نماد شرط (\rightarrow) نگاشته شد و سپس در جدول (ج) ارزش کل گزاره زیر ادات (\rightarrow) که ادات اصلی این گزاره است، آورده شده‌است.

همچنان که قبلاً بیان شد ضرورتی به رسم چند جدول برای نشان دادن جدول ارزش یک گزاره نمی‌باشد، بلکه می‌توان ارزش هر گزاره را در یک جدول مشخص نمود. نکته مهم آن است که ادات اصلی یک گزاره همواره درست تشخیص داده شود. برای نمونه به مثال زیر توجه نمایند.

مثال ۲: $(P \wedge q) \rightarrow (P \vee q)$

	+		×		+	
(P	\wedge	q)	\rightarrow	(P	\vee	q)
T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T	F
F	F	T	T	F	T	T
F	F	F	T	F	F	F

همچنان که مشاهده می‌کنید ادات اصلی در گزاره فوق ادات شرط (\rightarrow) است که مؤلفه $(P \wedge q)$ در سمت راست به عنوان مقدم و مؤلفه $(P \vee q)$ در سمت چپ آن به عنوان تالی می‌باشد. لذا لازم است ابتدا ارزش مقدم $(P \wedge q)$ را به دست آوریم و زیر نماد عطف (\wedge) بنویسیم، سپس ارزش تالی $(P \vee q)$ را به دست آوریم و زیر نماد فصل (\vee) بنویسیم. آنگاه ارزش کل گزاره زیر نماد شرط (\rightarrow) نوشته خواهد شد. برای جلوگیری از اشتباه می‌توانید ادات اصلی را با هاشور زدن و یا علامت \times و ادات فرعی را با علامت $+$ مشخص نمایید، همچنان که در جدول فوق مشاهده می‌کنید.

تمرین ۱: جدول ارزش گزاره‌های زیر را رسم نمایید.

- الف) $\neg(P \rightarrow q)$ ب) $\neg P \rightarrow q$
 ج) $(p \vee q) \rightarrow r$ د) $(P \rightarrow q) \rightarrow \neg(\neg p \vee q)$

تمرین ۲: گزاره‌های زیر را ابتدا به شکل نمادین نوشته، سپس جدول ارزش آنها را ترسیم نمایند.

- الف) چنین نیست اگر P زوج باشد، آنگاه $P+2$ نیز زوج باشد.
 ب) اگر منجی موعود (ع) ظهور کند، زمین پر از عدل و داد می‌گردد.
 ج) اگر معلم در کلاس حاضر نشود کلاس تشکیل نمی‌شود.
 د) اگر کشاورزان به موقع زمین را شخم زده و باران ببارد، آنگاه کشاورزان محصول فراوانی برداشت می‌کنند.

تمرین ۳:

۱. ارزش کل گزاره $[(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)] \sim$ زیر کدام یک از ادات آن نوشته می‌شود؟

- (الف) ادات شرط (\rightarrow)
 (ب) ادات نقیض (\sim)
 (ج) ادات فصل (\vee)
 (د) ادات عطف (\wedge)

۲. ارزش کل گزاره $P \rightarrow (\sim P \vee Q \wedge Q)$

- (الف) ادات فصل (\vee)
 (ب) ادات شرط (\rightarrow)
 (ج) ادات عطف (\wedge)
 (د) ادات نقیض (\sim)

۳. کدام یک از گزینه‌های زیر نمایانگر ارزش گزاره $(P \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow P)$

(الف)	(ب)	(ج)	(د)
F	T	T	T
F	F	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F

۴. کدام یک از گزینه‌های زیر نمایانگر ارزش گزاره $(P \rightarrow q) \rightarrow q$

(الف)	(ب)	(ج)	(د)
T	T	F	T
T	F	F	T
F	F	T	T
T	T	F	F

۵. کدام یک از گزینه‌های زیر نمایانگر ارزش گزاره $(P \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

(الف)	(ب)	(ج)	(د)
T	F	T	T
F	F	T	F
T	T	F	F
F	F	T	F
T	F	T	T
F	T	F	F
T	F	F	T
T	T	T	T

تمرین ۳:

۱. ارزش کل گزاره $[(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)] \sim$ زیر کدام یک از ادات آن نوشته می‌شود؟

الف) ادات شرط (\rightarrow) ب) ادات نقیض (\sim)

ج) ادات فصل (\vee) د) ادات عطف (\wedge)

۲. ارزش کل گزاره $P \rightarrow (\sim P \vee Q \wedge Q)$

الف) ادات فصل (\vee) ب) ادات شرط (\rightarrow)

ج) ادات عطف (\wedge) د) ادات نقیض (\sim)

۳. کدام یک از گزینه‌های زیر نمایانگر ارزش گزاره $(P \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow P)$

الف) (ب) (ج) (د)

T T T F

T T F F

F F T T

F T F T

۴. کدام یک از گزینه‌های زیر نمایانگر ارزش گزاره $(P \rightarrow q) \rightarrow q$

الف) (ب) (ج) (د)

T F T T

T F F T

T T F F

F F T T

۵. کدام یک از گزینه‌های زیر نمایانگر ارزش گزاره $(P \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

الف) (ب) (ج) (د)

T T F T

F T F F

F F T T

F T F F

T T F T

T F T F

F F F T

T T T T

۶. کدام یک از گزینه‌های زیر نمایانگر ارزش گزاره $\sim P \rightarrow (q \rightarrow P)$ است.

(الف)	(ب)	(ج)	(د)
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	T	T
T	T	T	F

۶-۳ جدول ارزش گزاره‌های دوشروطی

گزاره‌های دوشروطی که به صورت نمادین $p \leftrightarrow q$ نشان داده می‌شود، مانند «اگر و تنها اگر معلم آمد درس شروع می‌شود» در صورتی صادق هستند که هر دو مؤلفه آنها دارای ارزش یکسان باشند؛ یعنی هر دو مؤلفه آنها صادق و یا کاذب باشند.

برای نگارش جدول ارزش یک گزاره مرکب دوشروطی مانند $p \leftrightarrow q$ ابتدا ارزش مؤلفه‌های آن را می‌نویسیم. مانند جدول زیر:

p	\leftrightarrow	q
T		T
T		F
F		T
F		F

سپس ارزش گزاره مرکب دو شرطی $p \leftrightarrow q$ را زیر نماد دو شرطی \leftrightarrow نوشته می‌شود. مانند جدول زیر:

p	\leftrightarrow	q
T	T	T
T	F	F
F	F	T
F	T	F

همچنان‌که مشاهده می‌کنید گزاره مرکب دو شرطی $p \leftrightarrow q$ در سطر یک که مؤلفه p و مؤلفه q دارای ارزش صدق (T) است، صادق می‌باشد و در سطر چهار که

مؤلفه p و مؤلفه q دارای ارزش کاذب (F) هستند نیز صادق می‌باشد و در دو سطر سه و چهار که هر دو مؤلفه p و q دارای ارزش یکسان نمی‌باشند، کاذب می‌باشد.

مثال ۱: $(P \wedge q) \leftrightarrow (P \vee q)$

(الف)				(ب)						
	+	×	+		+	×	+			
(P	\wedge	q)	\leftrightarrow	(P	\vee	q)	\leftrightarrow	(P	\vee	q)
T		T		T		T		T		T
T		F		T		F		T		F
F		T		F		T		F		T
F		F		F		F		F		F

(ج)

	+	×	+			
(P	\wedge	q)	\leftrightarrow	(P	\vee	q)
T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T
F	F	F	T	F	F	F

مثال ۲: $(p \leftrightarrow q) \vee (r \leftrightarrow q)$

	+	×	+			
(p	\leftrightarrow	q)	\vee	(r	\leftrightarrow	q)
T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	T	F	F	T
T	F	F	F	T	F	F
T	T	F	T	F	T	F
F	F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	F	T
F	T	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	T	F

همچنان که در جدول این گزاره مشاهده می‌کنید، این گزاره دارای سه جمله نشانه است. لذا جدول ارزش آن دارای هشت سطر می باشد. ابتدا ادات اصلی با علامت \times مشخص شده است، سپس ادات فرعی با علامت $+$ تعیین شده است. آنگاه ارزش سه مؤلفه (p, q, r) آن نگاشته شده، سپس ارزش دو گزاره مرکب سمت راست و سمت چپ ادات اصلی مشخص گردیده است و در پایان ارزش کل گزاره زیر ادات اصلی (\vee) ارائه شده است.

تمرین ۱: جدول ارزش گزاره‌های زیر را رسم کنید.

الف) $\sim\sim(F \leftrightarrow G)$

ب) $\sim[(F \leftrightarrow G) \wedge (G \rightarrow H)]$

ج) $(P \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$

د) $(p \leftrightarrow q) \vee r$

تمرین ۲:

الف) کدامیک از گزینه‌های زیر نمایانگر ارزش گزاره $(P \vee q) \leftrightarrow \sim(\sim q \wedge \sim p)$ است؟

الف)	ب)	ج)	د)
T	F	T	T
T	F	F	T
T	F	T	F
T	F	F	T

ب) کدامیک از گزینه‌های زیر نمایانگر ارزش گزاره $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$ است.

الف)	ب)	ج)	د)
T	T	F	F
T	F	F	T
T	F	F	F
T	F	F	F

ج) کدام یک از گزینه‌های زیر نمایانگر ارزش گزاره $(p \wedge q) \vee (p \leftrightarrow q)$ است؟

(الف)	(ب)	(ج)	(د)
T	T	F	T
F	F	F	T
T	F	T	F
F	T	T	F

د) کدام یک از گزینه‌های زیر نمایانگر ارزش گزاره $(p \rightarrow q \leftrightarrow \neg(q \rightarrow p))$ است؟

(الف)	(ب)	(ج)	(د)
F	T	T	F
F	F	T	T
T	F	T	T
F	T	T	F

۷-۳ جدول ارزش گزاره‌های مرکب در یک نگاه

ارزش گزاره‌های مرکب عطفی، فصلی، شرطی و دوشروطی را می‌توان در یک جدول نشان داد:

p	q	$(p \wedge q)$	$(p \vee q)$	$p \rightarrow q$	$(p \leftrightarrow q)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

۸-۳ یادآوری‌های ضروری

تذکر: الف) با توجه به جدول فوق هرگاه ارزش جمله نشانه‌های یک گزاره را داشته باشیم، می‌توان حکم به صدق و یا کذب یک گزاره نمود. مثلاً اگر بدانیم A و B صادق و x و y گزاره‌های کاذبی هستند، می‌توانیم صدق و کذب گزاره‌های زیر را بدون رسم جداول متعدد به صورت زیر نشان دهیم.

$$A \vee [x \wedge (B \vee y)]$$

$$TTFFTTF$$

مثال ۱:

جدول ارزش ۶۱

گزاره فوق صادق است برای آنکه با صدق این گزاره آشنا شوید، جدول ارزش آن به شرح زیر ارائه می‌شود:

جدول (الف)

A	\vee	$[X$	\wedge	$(B$	\vee	$y)]$
T		F		T		F

جدول (ب)

A	\vee	$(X$	\wedge	$(B$	\vee	$y)$
T		F		T	F	F

جدول (ج)

A	\vee	$(X$	\wedge	$(B$	\vee	$y)$
T		F	F	T	T	F

جدول (د)

	+	\times		+		
A	\vee	$(X$	\wedge	$(B$	\vee	$y)$
T	\textbackslash	F	F	T	T	F

گزاره فوق صادق است؛ زیرا گزاره‌ی مرکب فصلی است و در مرکب فصلی اگر حداقل یک مؤلفه صادق باشد، کل گزاره صادق است.

$$\sim Y \wedge \sim B$$

مثال ۲: $TFFFT$

گزاره فوق کاذب است؛ زیرا گزاره مرکب عطفی با کذب یکی از مؤلفه آن کاذب خواهد بود.

$$A \rightarrow (X \rightarrow B)$$

مثال ۳: $TTFTT$

گزاره فوق صادق است؛ زیرا گزاره مرکب شرطی فقط هنگامی که مقدم صادق و تالی کاذب باشد، کاذب است. در این گزاره، مقدم و تالی صادق هستند، پس کل گزاره صادق است.

تمرین: اگر A و B کاذب و x و y صادق باشند، کدام یک از گزاره‌های مرکب زیر صادق و کدام کاذب است؟

$$۱. \sim(A \vee x)$$

$$۲. \sim B \vee \sim y$$

$$۳. (x \wedge y) \wedge (A \vee B)$$

$$۴. (A \wedge Y) \vee (Y \vee B)$$

$$۵. (A \leftrightarrow B) \wedge (x \rightarrow y)$$

$$۶. \sim \{ \sim [\sim (A \wedge B) \wedge (\sim A \wedge \sim B)] \}$$

$$۷. B \rightarrow (y \rightarrow A)$$

$$۸. (y \rightarrow x) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$۹. (A \wedge B) \wedge (x \wedge y)$$

$$۱۰. (A \leftrightarrow B) \wedge (x \leftrightarrow y)$$

تذکر ب) در جمله‌های مرکبی که دارای سه جمله نشانه است، اگر ارزش دو جمله نشانه را داشته باشیم می‌توانیم ارزش کل جمله را مشخص نماییم. مثلاً اگر بدانیم گزاره A صادق و گزاره B کاذب است، ولی ارزش گزاره C نامشخص می‌باشد، می‌توان ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کرد.

$$\text{مثال ۱: } (B \wedge C)$$

F

توضیح: با توجه به اینکه می‌دانیم مولفه B کاذب است حال مولفه C ، خواه صادق یا کاذب باشد، کل گزاره $(B \wedge C)$ کاذب است؛ زیرا گزاره مرکب عطفی با کذب یکی از مؤلفه‌هایش کاذب خواهد بود.

$$\text{مثال ۲: } A \vee C$$

T

توضیح: این گزاره صادق است؛ زیرا گزاره فوق یک گزاره مرکب فصلی است که با صدق یکی از مؤلفه‌هایش صادق خواهد بود.

تمرین: اگر A کاذب و B صادق و ارزش C نامعلوم باشد، ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$

ب) $(A \wedge B) \rightarrow C$

ج) $A \wedge C$

د) $\sim B \rightarrow [(B \wedge A) \leftrightarrow (B \vee C)]$

۹-۳ گزاره‌های دائم‌الصدق^۱، ممکن‌الصدق^۲ و دائم‌الکذب^۳

هر سطر یک جدول ارزش را تعبیری از یک گزاره می‌نامند. یک جدول ارزش کامل همه تعبیرهای ممکن یک گزاره را نشان می‌دهد. حال اگر جدول ارزش یک گزاره در هر تعبیری صادق باشد، آن را «گزاره دائم‌الصدق» می‌نامند و اگر در هر تعبیری کاذب باشد آن را «گزاره دائم‌الکذب» می‌گویند و اگر در برخی تعبیرها صادق و در برخی تعبیرها کاذب باشند، به آن «گزاره ممکن‌الصدق» گفته می‌شود.

به عبارت دیگر، اگر در زیر ادات اصلی یک گزاره در جدول ارزش فقط حرف T را داشته باشیم، به آن «گزاره دائم‌الصدق» یا راستگو گفته می‌شود و اگر فقط حرف F داشته باشیم، به آن گزاره «دائم‌الکذب» یا ناسازگار و نمونه کاذب گفته می‌شود و اگر جدول ارزش یک گزاره در برخی تعبیرها T و در برخی دیگر F باشد، به آن گزاره «ممکن‌الصدق» گفته می‌شود.

الف) گزاره‌های دائم‌الصدق

به گزاره‌های دائم‌الصدق، توتولوژی و راستگو نیز گفته می‌شود. این گزاره‌ها همچنان که قبلاً بیان شد، گزاره‌هایی هستند که در همه تعبیرها (سطرها) در جدول ارزش، ارزش T داشته دارند. مانند گزاره‌های زیر:

1. tautology
2. contingent sentence
3. self - contradictory